



# CTSCAFE PARA CIUDADANOS.....

<http://www.ctscafe.pe>

ISSN 2521-8093



Volumen VII- N° 21 Noviembre 2023

<http://www.ctscafe.pe>

Lima - Perú

**REVISTA DE INVESTIGACIÓN MULTIDISCIPLINARIA**



<http://www.ctscafe.pe>

Volumen VII- N° 21 Noviembre 2023

ISSN 2521-8093



# Método de elementos finitos para una formulación variacional de una EDP lineal tipo elíptico, asociado a la ecuación de una superficie bidimensional, usando algoritmo de Free Fem++

Mg. Guillermo Sucsaire Sucsaire  
Universidad Nacional Federico Villarreal  
Correo Electrónico: pcmagsuc@upc.edu.pe

Dr. Alex Armando Cruz Huallpara  
Universidad Nacional Federico Villarreal  
Correo Electrónico: acruz@unmsm.edu.pe

Mg. Rodolfo José Gálvez Pérez  
Universidad Nacional Mayor de San Marcos  
Correo Electrónico: rgalvezp@unmsm.edu.pe

Recibido: 20 octubre 2023

Aceptado: 20 Noviembre 2023

28

**Resumen:** En el presente artículo, se determina la solución numérica de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor usando método de diferencias finitas y algoritmo de Free Fem++” también el teorema de Lax-Milgram que es una herramienta fundamental en la resolución de EDPs elípticas.

**Palabras claves:** Teorema de Lax-Milgram/ Ecuaciones diferenciales parciales elípticas/ Free Fem++.

**Abstract:** In this paper, the numerical solution of the partial differential equation of non-stationary heat transfer with internal heat source is determined using the finite difference method and the Free Fem++ algorithm, as well as the Lax-Milgram theorem, which is a fundamental tool in the resolution of elliptic PDEs.

**Keywords:** Lax-Milgram's theorem/ Elliptic partial differential equations/ Free Fem++.

**Résumé :** Dans cet article, la solution numérique de l'équation aux dérivées partielles du transfert de chaleur non stationnaire avec source de chaleur interne est déterminée à l'aide de la méthode des différences finies et de l'algorithme Free Fem++, ainsi que du théorème de Lax-Milgram, qui est un outil fondamental dans la résolution des PDE elliptiques.

**Mots-clés:** Théorème de Lax-Milgram/Équations aux dérivées partielles elliptiques/Fem++ gratuit.

## 1. Introducción

En esta investigación realizada, planteamos una aproximación para la solución numérica de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor usando método de diferencias finitas. El problema del modelo se plantea de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot (k \nabla u) - qu_t = -f \quad (I)$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, u \in H^1(\Omega) \text{ y } k, q \in L^\infty(\Omega)$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es un dominio de la ecuación diferencial parcial elíptica. La ecuación (I) es la versión de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor además se consideró un problema bidimensional y empleó el método de diferencias finitas para resolver el problema. Aunque la mayor parte del estudio se vinculara con la existencia y unicidad de la solución de un problema del tipo bidimensional. Hay que mencionar que la solución numérica del problema planteado por el método de diferencias finitas usando el algoritmo de Free Fem++ a desarrollar tiene una escasa literatura, pero pese a ello se desarrollará un ejemplo muy ilustrativo al usar el algoritmo de Free Fem++ que ayudará a la comprensión de este tipo de estudios.

## 2. Material y métodos

### Distribuciones

Se utilizará nociones o tópicos importantes que nos ayudarán a entender mejor el análisis de las ecuaciones diferenciales elípticas que estamos estudiando, como la teoría de distribuciones o funciones generalizadas de L.Schwartz, así como el conocimiento de las distribuciones regulares, también la teoría de distribución y el conocimiento de la formulación variacional.

**Definición:** De acuerdo a Kolmogorov y Fomin (1970, p.208) mencionaron “una distribución en  $\Omega$  es cualquier aplicación  $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  el cual cumple las siguientes condiciones:

- 1) Lineal
- 2) Secuencialmente continua”

Dentro del espacio de Sobolev se distingue dos tipos de distribuciones llamadas las distribuciones regulares y las singulares.

### Espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$

Como parte del análisis que se va hacer se necesita ciertos conocimientos como los espacios en los cuales trabajaremos y la esencia del problema a resolver, veremos a continuación la definición del espacio de Sobolev así como los subespacios  $H^k(\Omega)$ ; utilizaremos algunas reglas algebraicas para la gradiente, además veremos la definición de las formas bilineales H-elípticas.

**Definición:** Yosida (1980, p.55) afirma “los espacios de Sobolev se definen de la siguiente manera. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto,  $k \geq 1$  un entero positivo y  $p \in [1, \infty >$ . se define.

$$W^{k,p} = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \text{ existe y pertenece a } L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

Para  $1 \leq p < \infty$  la norma  $\|\cdot\|_{k,p}$  es definida de la siguiente manera

$$\|f\|_{k,p} = \left( \int_{\Omega} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Definición:** De acuerdo a Ferragut y Asensio (2007, p.29) afirma “para el caso particular cuando  $p=2$ , definimos el espacio de Sobolev de orden  $k$  en  $\Omega$  con  $k \geq 1$ , al espacio:

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}$$

Tal que

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

Donde la norma asociada es:

$$\|f\|_{H^k} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

30

Además, comentamos que en el espacio  $W^{k,p}(\Omega)$  se usa la siguiente seminorma estándar, que conjuntamente con la desigualdad de Poincaré nos ayudará a poder acotar ciertas expresiones y poder demostrar la coercividad de cierta funciones que más adelante se observará.

$$\|f\|_{k,p} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha f|^p dx \right)^{1/p} = \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}$$

Observación si  $k=0$  entonces tendremos que:

$$H^0(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\} = L^2(\Omega)$$

**Problema principal para resolver:** La ecuación diferencial parcial a resolver es la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor, viene modelada por:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k \nabla u) - qu_t &= -f \\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, u &\in H^1(\Omega) \text{ y } k, q \in L^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

**3. Resultados**

**Teorema (EDP del modelo no estacionario con fuente interna).** – Sea  $\Omega$  un abierto y acotado de  $R^2$ . Supongamos que  $f, g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$  y que  $q, k \in L^\infty(\Omega)$  con  $k \geq C_5$ ,  $C_5 \in R^+$ ,  $q \geq 0$  además  $g_1 = c$ ,  $c \in R$  y  $u \in H^1(\Omega)$  tales que:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \nabla(k\nabla u) - qu_t = -f, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y, t) = g_1(x, y), & (x, y, t) \in \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} = g_2(x, y), & (x, y, t) \in \Gamma_N \times (0, T) \end{cases}$$

Entonces existen únicas  $u_1, u_2, \dots, u_N$  soluciones aproximadas de la formulación variacional de (3.1).

**En efecto:**

Para el estudio de la resolución de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor usaremos el siguiente modelo.

$$\begin{cases} \nabla(k\nabla u) - qu_t = -f, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y, t) = g_1(x, y), & (x, y, t) \in \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} = g_2(x, y), & (x, y, t) \in \Gamma_N \times (0, T) \end{cases}$$

Donde  $\Omega$  es un abierto acotado en  $R^2$  con  $g_1(x, y) = c$ ;  $c \in R$  con dominio de la forma  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  y  $q, k \in L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \subset R^2 \rightarrow R / \sup |u(x, y)| < \infty\}$ , además  $q(x, y) \geq 0$  y  $k(x, y) \geq C_5$  con  $C_5 \in R^+$  condiciones necesarias que ayudarán a comprobar la coercividad de la forma bilineal que se formará luego de la formulación variacional de la ecuación diferencial parcial elíptica.

Sea  $v \in H^1$ , luego procedemos a hallar la formulación variacional de la ecuación diferencial parcial elíptico del siguiente modo:

$$(3.2) \quad \int_{\Omega} [\nabla(k\nabla u)]vd\Omega - \int_{\Omega} qu_tvd\Omega = - \int_{\Omega} fvd\Omega$$

Luego aplicando las propiedades del gradiente en la primera parte de la expresión (3.2) tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [(\nabla k)(\nabla u) + k\nabla^2 u]vd\Omega - \int_{\Omega} qu_i vd\Omega = - \int_{\Omega} fvd\Omega \\
 & \int_{\Omega} [(\nabla k)(\nabla u) + k\Delta u]vd\Omega - \int_{\Omega} qu_i vd\Omega = - \int_{\Omega} fvd\Omega \\
 (3.3) \quad & \int_{\Omega} (\nabla k)(\nabla u)vd\Omega + \int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega - \int_{\Omega} qu_i vd\Omega = - \int_{\Omega} fvd\Omega
 \end{aligned}$$

Luego aplicando Teorema de Green en la segunda parte de la expresión (3.3) tenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega &= \int_{\Omega} (\Delta u)(kv)d\Omega = - \int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla kv)d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)(kv)d\Gamma \\
 \int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega &= \int_{\Omega} (\Delta u)(kv)d\Omega = - \int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla kv)d\Omega + \int_{\Gamma_D} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)(kv)d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)(kv)d\Gamma \\
 \int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega &= \int_{\Omega} (\Delta u)(kv)d\Omega = - \int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla kv)d\Omega + \int_{\Gamma_D} \left(\frac{\partial g_1}{\partial n}\right)(kv)d\Gamma + \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma
 \end{aligned}$$

Como  $g_1$  es una función constante tenemos que su derivada en la dirección de la normal es cero, por tanto, se reduce la expresión anterior:

32

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega &= - \int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla kv)d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma \\
 \int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega &= - \int_{\Omega} (\nabla u)[(\nabla k)v + k(\nabla v)]d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma \\
 (3.4) \quad \int_{\Omega} k(\Delta u)vd\Omega &= - \int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla k)vd\Omega - \int_{\Omega} k(\nabla u)(\nabla v)d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma
 \end{aligned}$$

Combinando (3.3) y (3.4) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (\nabla k)(\nabla u)vd\Omega - \int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla k)vd\Omega - \int_{\Omega} k(\nabla u)(\nabla v)d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma - \int_{\Omega} qu_i vd\Omega &= - \int_{\Omega} fvd\Omega \\
 - \int_{\Omega} k(\nabla u)(\nabla v)d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma - \int_{\Omega} qu_i vd\Omega &= - \int_{\Omega} fvd\Omega \\
 - \int_{\Omega} k(\nabla u)(\nabla v)d\Omega - \int_{\Omega} qu_i vd\Omega &= - \int_{\Omega} fvd\Omega - \int_{\Gamma_N} g_2(kv)d\Gamma \\
 (3.5) \quad \int_{\Omega} k(\nabla u)(\nabla v)d\Omega + \int_{\Omega} qu_i vd\Omega &= \int_{\Omega} fvd\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2 kvd\Gamma
 \end{aligned}$$

Donde:

$$B_{(u,v)} = \int_{\Omega} k(\nabla u)(\nabla v)d\Omega + \int_{\Omega} qu_1vd\Omega$$

$$F_{(v)} = \int_{\Omega} fvd\Omega + \int_{\Gamma_N} g_2kvd\Gamma$$

Ahora faltaría probar que se cumplan las condiciones para la forma bilineal “B” y el funcional “F” y así garantizar la existencia y unicidad de la solución de la formulación variacional.

Ahora veamos la parte numérica de la formulación variacional y poder implementarla en el programa de Free Fem++, para ello haremos la discretización del tiempo, comenzamos tomando una partición en (0, T) tal que se cumpla lo siguiente:  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$

; Luego utilizando las diferencias finitas con  $h = \frac{T}{N} > 0$  y para  $t = t_1$  tenemos que:

$$u_t(x, y, t_1) = \frac{u(x, y, t_1) - u(x, y, t_1 - h)}{h} = \frac{u(x, y, t_1) - u(x, y, 0)}{h}$$

Pues como  $t_0 = 0$  y como sabemos  $t_1 - t_0 = h$  por tanto  $t_1 - h = 0$ ; en general para el análisis de los demás casos, cuando se tome  $t = t_2$  usaremos la siguiente expresión  $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_N - t_{N-1} = h$  además denotaremos a condición inicial de la siguiente forma  $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ , por otro lado para los cálculos posteriores denotaremos  $f_1(x, y) = f(x, y, t_1)$ ,  $u_1(x, y) = u(x, y, t_1)$ ,  $v_1(x, y) = v(x, y, t_1)$ ,  $q_1(x, y) = q(x, y, t_1)$  y  $k_1(x, y) = k(x, y, t_1)$  luego reemplazando las nuevas notaciones en la formulación variacional (3.5):

$$\int_{\Omega} k_1(x, y)\nabla u_1(x, y)\nabla v_1(x, y)d\Omega + \int_{\Omega} q_1(x, y)\frac{u_1(x, y) - u_0(x, y)}{h}v_1(x, y)d\Omega = \int_{\Omega} f_1(x, y)v_1(x, y)d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma_N} g_2(x, y)k_1(x, y)v_1(x, y)d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} k_1(x, y)h\nabla u_1(x, y)\nabla v_1(x, y)d\Omega + \int_{\Omega} q_1(x, y)[u_1(x, y) - u_0(x, y)]v_1(x, y)d\Omega = \int_{\Omega} hf_1(x, y)v_1(x, y)d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma_N} hg_2(x, y)k_1(x, y)v_1(x, y)d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} hk_1(x, y)\nabla u_1(x, y)\nabla v_1(x, y)d\Omega + \int_{\Omega} q_1(x, y)u_1(x, y)v_1(x, y)d\Omega - \int_{\Omega} q_1(x, y)u_0(x, y)v_1(x, y)d\Omega = \int_{\Omega} hf_1(x, y)v_1(x, y)d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma_N} hg_2(x, y)k_1(x, y)v_1(x, y)d\Gamma$$



$$\int_{\Omega} h k_1(x, y) \nabla u_1(x, y) \nabla v_1(x, y) d\Omega + \int_{\Omega} q_1(x, y) u_1(x, y) v_1(x, y) d\Omega = \int_{\Omega} h f_1(x, y) v_1(x, y) d\Omega + \int_{\Omega} q_1(x, y) u_0(x, y) v_1(x, y) d\Omega + \int_{\Gamma_N} h g_2(x, y) k_1(x, y) v_1(x, y) d\Gamma$$

(3.6)

$$\int_{\Omega} [h k_1(x, y) \nabla u_1(x, y) \nabla v_1(x, y) + q_1(x, y) u_1(x, y) v_1(x, y)] d\Omega = \int_{\Omega} [h f_1(x, y) + q_1(x, y) u_0(x, y)] v_1(x, y) d\Omega + \int_{\Gamma_N} h g_2(x, y) k_1(x, y) v_1(x, y) d\Gamma$$

Definamos la siguiente función  $\psi_1(x, y) = (h f_1 + q_1 u_0)(x, y)$ ; luego a partir de (3.6) tenemos la siguiente expresión:

$$a(u_1, v_1) = \psi(v_1)$$

Donde:

$$(3.7) \quad a(u_1, v_1) = \int_{\Omega} [h k_1 \nabla u_1 \nabla v_1 + q_1 u_1 v_1] d\Omega$$

$$\psi(v_1) = \int_{\Omega} \psi_1 v_1 d\Omega + \int_{\Gamma_N} h g_2 k_1 v_1 d\Gamma$$

34

Para el caso de  $u_1, v_1$ , hasta el momento hemos conseguido las expresiones necesarias para poder probar la linealidad de la funcional  $\psi$ , la bilinealidad de la forma bilineal “ $a$ ”, también la continuidad y coercividad de “ $a$ ” y así poder utilizar el Teorema de Lax-Milgram generalizado para garantizar la existencia y unicidad de la solución de la formulación variacional.

**Afirmación 1:** Para el caso de  $u_1, v_1$  probaremos que “ $\psi$ ” es acotado y lineal.

**En efecto:**

Tomemos  $\psi_1 \in L^2$ , usando la desigualdad de Schwartz (o Hölder) y dado que  $q_1, k_1 \in L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \subset R^2 \rightarrow R / \sup |u(x, y)| < \infty\}$  tenemos que existe un número  $C_1 > 0$  tal que  $|k_1(x, y)| \leq C_1$  y  $|q_1(x, y)| \leq C_1$  además como  $f \in L^2(\Omega) = \{u : \Omega \subset R^2 \rightarrow R / u \text{ medible} \wedge \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 < \infty\}$  se garantiza que la norma de “ $f$ ” esta acotado superiormente también, luego:

$$|\psi(v_1)| = \left| \int_{\Omega} (h f_1 + q_1 u_0) v_1 d\Omega + \int_{\Gamma_N} h g_2 k_1 v_1 d\Gamma \right| \leq \|h f_1 + q_1 u_0\|_{L^2} \cdot \|v_1\|_{L^2} + \|h g_2 k_1\|_{L^2} \cdot \|v_1\|_{L^2}$$

$$\leq (\|h f_1\|_{L^2} + \|q_1 u_0\|_{L^2} + \|h g_2 k_1\|) \|v_1\|_{L^2}$$

$$|\psi(v_1)| \leq (\|h\| \|f_1\|_{L^2} + \|q_1\| \|u_0\|_{L^2} + \|h g_2\| \|k_1\|) \|v_1\|_{L^2} \leq (\|h\| \|f_1\|_{L^2} + C_1 \|u_0\|_{L^2} + C_1 \|h g_2\|) \|v_1\|_{L^2}$$

$$|\psi(v_1)| \leq C_2 \|v_1\|_{L^2} \leq C_2 \|v_1\|_{H^1}$$

Donde:

$$C_2 = h \|f_1\|_{L^2} + C_1 (\|u_0\|_{L^2} + |hg_2|)$$

$$|\psi(v_1)| \leq C_2 \|v_1\|_{H_0^1}$$

**Afirmación 2:** Para el caso de  $u_1, v_1$  probaremos que “ $a$ ” es bilineal.

**En efecto:**

Tomemos  $u, u', v \in H^1(\Omega); n, m \in R$  y probemos que se cumpla la bilinealidad:

Luego:

$$a(nu + mu', v) = \int_{\Omega} [q_1(nu + mu')v + k_1 h \nabla(nu + mu') \nabla v] d\Omega$$

$$a(nu + mu', v) = \int_{\Omega} [q_1 nuv + q_1 mu'v + k_1 h (\nabla(nu) + \nabla(mu')) \nabla v] d\Omega$$

$$a(nu + mu', v) = \int_{\Omega} [q_1 nuv + q_1 mu'v + k_1 h \nabla(nu) \nabla v + k_1 h \nabla(mu') \nabla v] d\Omega$$

$$a(nu + mu', v) = \int_{\Omega} [nq_1 uv + nk_1 h \nabla u \nabla v + mq_1 u'v + mk_1 h \nabla u' \nabla v] d\Omega$$

$$a(nu + mu', v) = \int_{\Omega} [n(q_1 uv + k_1 h \nabla u \nabla v) + m(q_1 u'v + k_1 h \nabla u' \nabla v)] d\Omega$$

$$a(nu + mu', v) = n \int_{\Omega} (q_1 uv + k_1 h \nabla u \nabla v) d\Omega + m \int_{\Omega} (q_1 u'v + k_1 h \nabla u' \nabla v) d\Omega$$

$$a(nu + mu', v) = na(u, v) + ma(u', v)$$

Por tanto, tenemos probado la linealidad en la primera componente de la forma bilineal “ $a$ ” luego la linealidad en la segunda componente es demostrada en forma análoga.

**Afirmación 3:** Para el caso de  $u_1, v_1$  probaremos que “ $a$ ” es acotado.

**En efecto:**

Sean  $u_1, v_1 \in H^1(\Omega)$ , luego en (3.7) tomamos la norma y así tenemos la siguiente expresión:

$$|a(u_1, v_1)| \leq \int_{\Omega} |q_1 u_1 v_1 + h k_1 \nabla u_1 \nabla v_1| d\Omega$$

$$|a(u_1, v_1)| \leq \int_{\Omega} |q_1 u_1 v_1| d\Omega + \int_{\Omega} |h k_1 \nabla u_1 \nabla v_1| d\Omega$$

Luego así como en la afirmación 1, sabemos que como  $k_1, q_1 \in L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \subset R^2 \rightarrow R / \sup |u(x, y)| < \infty\}$ , tenemos que están acotados

superiormente en  $\Omega$ , entonces existe  $C_1 > 0$  tal que  $|k_1(x, y)| \leq C_1$  y  $|q_1(x, y)| \leq C_1$  luego aplicando la desigualdad de Schwartz tenemos la siguiente desigualdad:

$$|a(u_1, v_1)| \leq \int_{\Omega} |q_1 u_1 v_1| d\Omega + \int_{\Omega} |h k_1 \nabla u_1 \nabla v_1| d\Omega \leq \int_{\Omega} |q_1| |u_1 v_1| d\Omega + \int_{\Omega} |h| |k_1| |\nabla u_1 \nabla v_1| d\Omega$$

$$(3.8) \quad |a(u_1, v_1)| \leq C_1 \int_{\Omega} |u_1 v_1| d\Omega + C_3 \int_{\Omega} |\nabla u_1 \nabla v_1| d\Omega$$

donde  $C_3 = |h| C_1$ .

Por otro lado, de la definición de semi norma tenemos que:

$$\|u\|_{1,2} \leq \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq \left( \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right)^{1/2} = \left( \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \right)^{1/2}$$

$$(3.9) \quad \|u\|_{1,2} \leq \|u\|_{H^1}$$

Luego, analizaremos la segunda integral de la desigualdad (3.8) para luego usar la desigualdad de Hölder juntamente con la definición de semi norma y la desigualdad en (3.9), es así como tenemos la siguiente expresión:

$$(3.10) \quad \int_{\Omega} |\nabla u_1 \nabla v_1| d\Omega \leq \|\nabla u_1\|_{L^2} \|\nabla v_1\|_{L^2} = \|u_1\|_{1,2} \|v_1\|_{1,2} \leq \|u_1\|_{H^1} \|v_1\|_{H^1}$$

36

Luego de (3.8) y (3.10) se obtiene la siguiente desigualdad:

$$|a(u_1, v_1)| \leq C_1 \|u_1\|_{H^1} \|v_1\|_{H^1} + C_3 \|u_1\|_{1,2} \|v_1\|_{1,2}$$

$$|a(u_1, v_1)| \leq C_1 \|u_1\|_{H^1} \|v_1\|_{H^1} + C_3 \|u_1\|_{H^1} \|v_1\|_{H^1}$$

$$|a(u_1, v_1)| \leq C_4 \|u_1\|_{H^1} \|v_1\|_{H^1}$$

donde  $C_4 = C_1 + C_3$ .

Por tanto, tenemos probado que “ $a$ ” es acotado.

**Afirmación 4:** Para el caso de  $u_1, v_1$  probaremos que “ $a$ ” es coersiva en  $H^1(\Omega)$ .

**En efecto:**

Tomemos la forma bilineal “ $a$ ” en (3.7), luego usando la desigualdad de Poincaré y también usando las condiciones de “ $q$ ” y “ $k$ ”, tenemos lo siguiente:

Primero sabemos que:

$$a(u_1, v_1) = \int_{\Omega} [h k_1 \nabla u_1 \nabla v_1 + q_1 u_1 v_1] d\Omega$$

luego de lo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
 a(u_1, u_1) &= \int_{\Omega} [q_1 u_1^2 + h k_1 |\nabla u_1|^2] \partial\Omega \geq \int_{\Omega} h k_1 |\nabla u_1|^2 \partial\Omega \\
 (3.11) \quad a(u_1, u_1) &\stackrel{def}{\geq} h \int_{\Omega} k_1 |\nabla u_1|^2 \partial\Omega \geq h C_5 \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 \partial\Omega = h C_5 |u_1|_{1,2}^2
 \end{aligned}$$

Por otro lado, de la desigualdad de Poincaré formemos una desigualdad el cual utilizaremos, para ello sea  $u \in H^1(\Omega)$  tal que:

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{L^2} &\leq C_p \|\nabla u\|_{L^2} \\
 \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} &\leq C_p \|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \\
 \|u\|_{H^1} &\leq (C_p + 1) \|\nabla u\|_{L^2} \\
 (3.12) \quad \|u\|_{H^1} &\leq (C_p + 1) |u|_{1,2}
 \end{aligned}$$

Con  $C_p > 0$ .

Luego continuando de (3.11) y (3.12) resulta que:

$$\begin{aligned}
 a(u_1, u_1) &\geq h C_5 |u_1|_{1,2}^2 \geq \frac{h C_5}{(C_p + 1)^2} \|u_1\|_{H^1}^2 \geq M \|u_1\|_{H^1}^2 \\
 a(u_1, u_1) &\geq M \|u_1\|_{H^1}^2
 \end{aligned}$$

Donde  $M = \frac{h C_5}{(C_p + 1)^2}$

Luego tenemos probado que “ $a$ ” es coersiva en  $H^1(\Omega)$ . Por tanto, por el teorema de Lax-Milgram podemos garantizar la existencia y unicidad de la solución  $u_1$  de la formulación variacional.

Continuando con la discretización del tiempo para el caso de  $t = t_2$  se prueba que se cumplan las condiciones necesarias para poder aplicar el teorema de Lax-Milgram garantizar la existencia y unicidad de la solución  $u_2$  de la formulación variacional. Por lo tanto, realizando el mismo procedimiento se puede hallar de forma reiterativa  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_N$  soluciones aproximadas de la formulación variacional.

#### 4. Discusión: Aplicación del método estudiado usando algoritmo de Free Fem++ de un problema de contorno bidimensional

Supongamos se tiene un cuarto de habitación en 3D cuya forma es de “L” y en uno de sus lados se ubica una fuente interna de calor que podría ser una chimenea o una estufa ubicado en uno de los lados del cuarto, se desea hacer la simulación del flujo de calor sobre el plano generado por la intersección del corte transversal paralelo al plano XY y el cuarto de habitación en 3D cuya forma es de “L”. Además, la conductividad termina que usaremos será de  $k=0.023 \text{ W/m}^\circ\text{C}$  pues se hará la simulación en un medio que será el aire.

##### Archivo: Difusión.edp

```

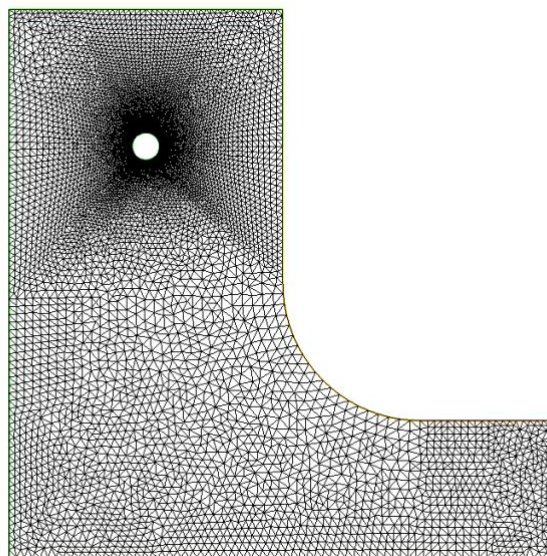
load "iovtk"
int C1=10;
real k=0.023;
real q=0.01;
real[int] colorhsv=[
4./6., 1 , 0.5,
4./6., 1 , 1,
0.5, 1 , 1,
1./3.,1, 1,
1./6.,1,1,
0,1,1
];
border a(t=0,1){x=4*t;y=0;};
border b(t=0,1){x=4;y=t;};
border c(t=0,1){x=4-t;y=1;};
border circulo(t=1.5*pi,pi){x=3+cos(t);y=2+sin(t);};
border e(t=0,1){x=2;y=2+t;};
border f0(t=0,1){x=2;y=3+t;};
border g(t=0,2){x=2-t;y=4;};
border h(t=0,4){x=0;y=4-t;};
border circulo(t=0,2*pi){x=1+0.1*cos(t);y=3+0.1*sin(t);};
int n=10;

//Generación de la malla:
mesh Mesh= buildmesh (a(7*n)+b(2*n)+c(2*n)+circulo(2*n)+e(2*n)+f0(2*n)+
g(5*n)+h(7*n)+circulo(-10*n));
plot (Mesh, wait=true,cmm="Malla");
real dt=0.1;
real t=0;
fespace SpaceP1(Mesh,P2);
SpaceP1 u,v,u0,f,g1,g2;
//Formulación variacional:
problem diffuse(u,v)=int2d(Mesh)(dt*k*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))+q*u*v)-
int2d(Mesh)(dt*f*v+q*u0*v)-int1d(Mesh,circulo)(dt*g2*k*v)
+on(a,b,c,circulo1,e,f0,g,h,u=18)
+on(circulo,u=60);
u0=18;
    
```

```

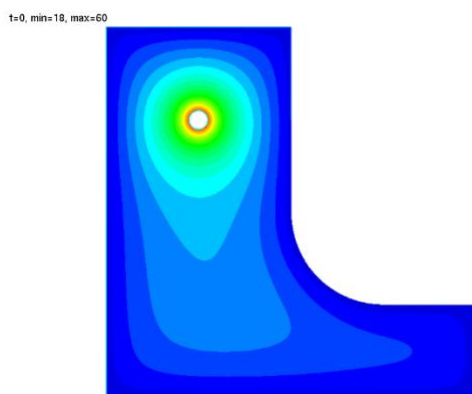
for(int m=0; m<=3/dt; m++)
{
    f=exp(t) ;//sin(x)
    diffuse;
    //plot (u,wait=0,value=1,fill=1,hsv=colorhsv);
    plot (u,wait=0,cmm=" t="+t +", min=" + u[].min + ", max=" + u[].max,
    value=0,fill=1,hsv=colorhsv);
    t=t+dt;
}
plot (u, dim=3, wait=1, value=true, hsv=colorhsv, fill=true,cmm="Modelo de
transferencia de calor no estacionario con fuente interna");
    
```

**Figura N°1:** Malla generada con difusión.edp



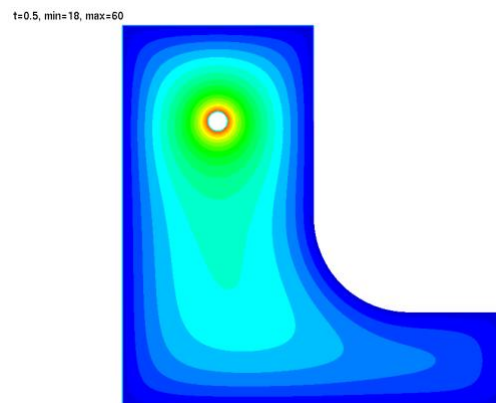
**Fuente:** elaboración propia

**Figura N°2.** Solución obtenida de la EDP para t=0.0



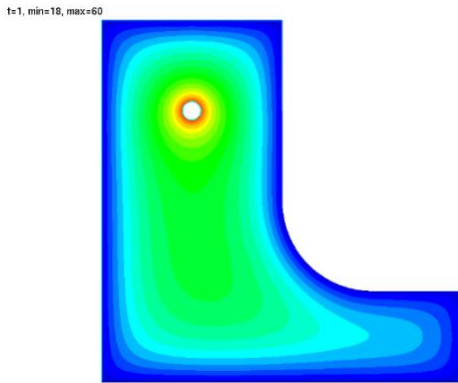
**Fuente:** elaboración propia

**Figura N°3.** Solución obtenida de la EDP para t=0.5



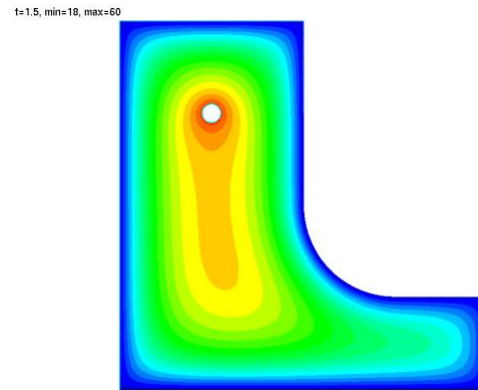
**Fuente:** elaboración propia

**Figura N°4:** Solución obtenida de la EDP para  $t=1.0$



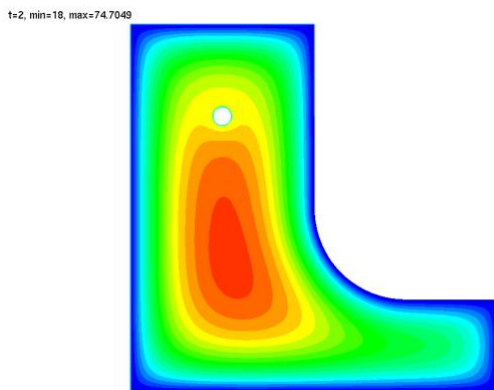
Fuente: elaboración propia

**Figura N°5:** Solución obtenida de la EDP para  $t=1.5$



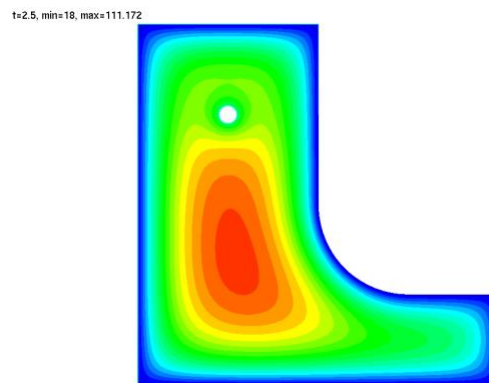
Fuente: elaboración propia

**Figura N°6:** Solución obtenida de la EDP para  $t=2.0$



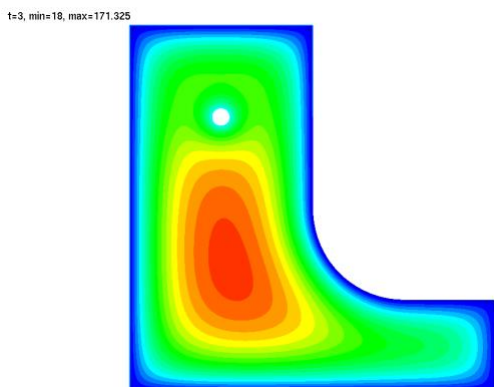
Fuente: elaboración propia

**Figura N°7:** Solución obtenida de la EDP para  $t=2.5$



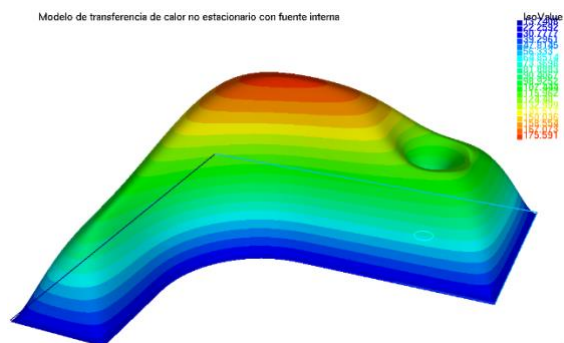
Fuente: elaboración propia

**Figura N°8:** Solución obtenida de la EDP para  $t=3.0$



Fuente: elaboración propia

**Figura N°9:** Solución obtenida de la EDP en 3D



Fuente: elaboración propia

## 5. Conclusiones

Se determina y aplica la solución numérica de una ecuación diferencial parcial de transferencia de calor no estacionario con fuente interna de calor empleando el método de diferencias finitas con el programa Free Fem++ además se presenta el algoritmo que realiza la simulación de un fenómeno descrito por la ecuación diferencial parcial elíptica.

## 6. Recomendaciones

Se recomienda para un mejor análisis y optimización de las soluciones utilizar el programa Gmsh y programa de FreeCad que son herramientas que ayudaran a poder mostrar las mallas y generarlas de maneras más eficientes y reales.

## 7. Literatura citada

- [1] **Adams, R. y Fourier, J.;** *Sobolev Spaces*, Academic Press, Amsterdam. 2003.
- [2] **Brézis, H.;** *Análisis funcional teoría y aplicaciones*, Paris. 1983.
- [3] **Calderón, G. y Gallo, R.;** *Introducción al método de los elementos finitos: un enfoque matemático*, Universidad de los Andes. Caracas, Venezuela. 2011.
- [4] **Chumpitaz, M.;** *Análisis Funcional*, Universidad Nacional de Ingeniería. Lima, Perú. S.f.
- [5] **Ferragut, L. y Asensio, M.;** *Métodos numéricos para ecuaciones en derivadas parciales*. 2007.
- [6] **Gatica G.;** *Análisis numérico de EDPs. El Método de elementos finitos mixtos*, Universidad de Concepción. 2012.
- [7] **Hernández, R., Fernández, C. y Batista, P.;** *Metodología de la investigación* (6ta edición). México: McGraw-Hill interamericana. 2014.
- [8] **Izquierdo, G.;** *Modelización de la ecuación de calor con diferencias finitas*, Universidad de Barcelona. 2017.
- [9] **Kolmogorov, A. y Fomin, S.;** *Introductory Real Analysis*, New York, Dover Publications. 1970.
- [10] **Kreyszig, E.;** *Introductory Functional Analysis with Applications*, University of Windsor, New York. 1978.
- [11] **Mendoza, B.;** *Resolución de ecuaciones diferenciales parciales mediante el método de diferencias finitas y su paralelización*, Universidad Nacional Autónoma de México. 2016.
- [12] **Miana, P.;** *Curso de análisis funcional*, Universidad de Zaragoza, Zaragoza. 2006.



- [13] **Rudin, W.**; *Functional analysis* (2da edición). University of Wisconsin, New York: McGraw-Hill. 1991.
- [14] **Sánchez, H. y Reyes, C.**; *Metodología y diseños en la investigación científica*. Lima, Perú. 2015.
- [15] **Solín, P.**; *Partial Differential Equations and the finite Element Method*, John Wiley y Sons, Ltd 2006.
- [16] **Tamayo, M.**; *El proceso de la investigación científica: incluye evaluación y administración de proyectos de investigación* (5ta edición). México: Limusa. 2015.
- [17] **Treves, F.**; *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic press, New York. 1967.
- [18] **Vidaurre, R.**; Modelización de la transferencia de calor durante el escaldado del loche (cucurbita moschata) y papa (solanum tuberosum), Universidad Nacional Agraria la Molina. 2015.
- [19] **Yosida, K.**; *Functional Analysis*, Berlin Heidelberg - New York. 1980.

**REVISTA DE INVESTIGACIÓN MULTIDISCIPLINARIA**



<http://www.ctscafe.pe>

Volumen VII- N° 21 noviembre 2023

*Contáctenos en nuestro correo electrónico  
[revistactscafe@ctscafe.pe](mailto:revistactscafe@ctscafe.pe)*

147

Página Web:

<http://ctscafe.pe>

Blog:

<https://ctscafeparaciudadanos.blogspot.com/>

Facebook

<https://www.facebook.com/Revista-CTSCafe-1822923591364746/>

