Revista de Investigación Multidisciplinaria

CTScafe PARA CIUDADANOS......

http://www.ctscafe.pe
ISSN 2521-8093

Volumen V- Nº 13 Marzo 2021
http://www.ctscafe.pe
Lima - Perú

Estudio de la estabilidad de un sistema lineal disipativo con aplicación a la óptica

Mg. Víctor Hilario Tarazona Miranda
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Correo Electrónico: vtarazonam@unmsm.edu.pe

Mg. Paulo Cesar Olivares Taipe
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Correo Electrónico: paulo.olivares@unmsm.edu.pe

Mg. Miky Gerónimo Ortiz Ramírez
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Correo Electrónico: miky.ortiz@gmail.com

Mg. Zoraida Judith Huaman Gutierrez
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Correo Electrónico:zhuamang@unmsm.edu.pe

Dr. Carlos Ortega Muñoz
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Correo Electrónico: carlos.ortega@unmsm.edu.pe

Resumen: Estudiar la estabilidad exponencial de la solución del sistema lineal acoplado de la ecuación de onda con término disipativo. En cuanto a la metodología la investigación fue de enfoque cuantitativo, diseño no experimental, de tipo básica, retrospectiva. Usando la teoría de semigrupos, se estudió la existencia y unicidad de solución para un sistema lineal acoplado de ecuaciones de la onda, afectado por un término disipativo y el comportamiento asintótico de la energía asociada al sistema. Se demuestra que la disipación dada por el término disipativo es lo suficientemente fuerte para producir estabilidad exponencial del semigrupo asociado al sistema. El estudio de este sistema es base fundamental para el entendimiento de fenómenos en las áreas de acústica, óptica, electromagnetismo y mecánica cuántica.

Palabras claves: Sistema disipativo/ Existencia única de soluciones/ Estabilidad exponencial/ Teoría de semigrupos/ Comportamiento asintótico.

Abstrac: To study the exponential stability of the solution of the coupled linear system of the wave equation with dissipative term. Regarding the methodology, the research was of a quantitative approach, non-experimental design, basic, retrospective. Using the theory of semigroups, the existence and uniqueness of solution for a coupled linear system of wave equations was studied, affected by a dissipative term and the asymptotic behavior of the energy associated with the system. It is shown that the dissipation given by the dissipative term is strong enough to produce exponential stability of the semigroup associated with the system. The study of this system is a fundamental basis for the understanding of phenomena in the areas of acoustics, optics, electromagnetism and quantum mechanics.

Keywords: Dissipative system / Unique existence of solutions / Exponential stability / Theory of semigroups / Asymptotic behavior

Resumé: étudier la stabilité exponentielle de la solution du système linéaire couplé de l'équation d'onde à terme dissipatif. En ce qui concerne la méthodologie, la recherche était d'une approche quantitative, non expérimentale, de base, rétrospective. En utilisant la théorie des semi-groupes, l'existence et l'unicité de la solution pour un système linéaire couplé d'équations d'ondes a été étudiée, affectée par un terme dissipatif et le comportement asymptotique de l'énergie associée au système. On montre que la dissipation donnée par le terme dissipatif est suffisamment forte pour produire une stabilité exponentielle du semi-groupe associé au système. L'étude de ce système est une base fondamentale pour la compréhension des phénomènes dans les domaines de l'acoustique, de l'optique, de l'électromagnétisme et de la mécanique quantique.

Mots-clés: Système dissipatif / Existence unique de solutions / Stabilité exponentielle / Théorie des semi-groupes / Comportement asymptotique.

1. Introducción

Sistemas acoplados disipativos de ecuaciones de la onda han sido estudiados por varios autores y muchos resultados de existencia, comportamiento asintótico y observabilidad fueron demostrados. El estudio del comportamiento asintótico de sistemas disipativos es una rama fértil para la investigación en Ecuaciones Diferenciales Parciales. Para obtener este comportamiento, se han introducido diferentes tipos de mecanismos de disipación para estabilizar las oscilaciones. Con ese propósito, A. Haraux y E. Zuazua (1998) estudian la ecuación de onda del tipo Kirchoff con término disipativo de tipo friccional, usando la técnica de multiplicadores demostraron que la solución cuando ésta exista decae exponencialmente para cero. Por otro lado, Kormonif y Rao (1997) estudian un sistema lineal de dos ecuaciones de onda compactamente acoplada con damping friccional en la frontera de ambas ecuaciones, demuestran la existencia, la regularidad y estabilidad de las soluciones correspondientes.

Un sistema acoplado similar con damping friccional en la frontera actuando en una de las ecuaciones, es estudiado por Alabau (1999), demuestra el decaimiento polinomial de las soluciones fuertes cuando la velocidad de propagación de ambas ecuaciones es la misma. Otros sistemas acoplados con damping interno o con otro tipo de acoplamiento puede ser encontrado en Alabau, Canarsa y Kormonif (2002), Beyrath (2001-2004) y por último en Raposo, Bastos (2009).

El estudio realizado por Messaoudi y Tatar (2008), demuestran que el resultado de decaimiento uniforme puede ser obtenido con condiciones más débiles que los de Santos (2002). El resultado encontrado por Willer (1994) fue mejorado por Liu (2010), el demostró que, para cierta clase de funciones de relajación y ciertos datos iniciales, la solución de la energía decae con tasa semejante al decaimiento de la función de relajación, que no es necesariamente un decaimiento de forma polinomial o exponencial. El trabajo realizado por J. Muñoz (1992), estudia el sistema termoelástico, esto se da cuando hay un cambio de temperatura entre el material y el medio ambiente. Mientras tanto, C. Raposo (2005) estudia el sistema acoplado de ondas conocido como vigas de Timoshenko, utilizó la disipación dada por la fricción actuando en ambas ecuaciones y mostró que el sistema posee estabilidad exponencial.
El objetivo principal de la investigación es estudiar la estabilidad exponencial de la solución del sistema lineal acoplado de la ecuación de onda con término disipativo dado por:

$$u_{tt} - u_{xx} = (v-u) + (v-u)_t, \quad \text{en } \langle 0,L\rangle \times \langle 0,+\infty\rangle$$

$$v_{tt} - v_{xx} = (u-v) + (u-v)_t, \quad \text{en } \langle 0,L\rangle \times \langle 0,+\infty\rangle$$

Con condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x); \;\; v(x,0) = v_0(x); \;\; x \in \langle 0,L\rangle$$

Y con condiciones frontera

$$u(0,t) = u(L,t) = 0; \;\; v(0,t) = v(L,t) = 0; \;\; t \geq 0$$

Donde $u = u(x,t)$ y $v = v(x,t)$ representan los desplazamientos transversales de la membrana.

30

2. Material y métodos

El estudio se trató de una investigación de enfoque cuantitativo, tipo básico, diseño no experimental, de nivel descriptivo.
En relación a las técnicas e instrumentos de recolección de datos se utilizó la técnica de análisis documental usando como instrumento fichas bibliográficas y análisis de contenido. En el sistema dado, encontramos la energía asociada al sistema, el espacio de fase y la norma, para luego expresar el sistema dado en un problema abstracto de Cauchy, empleando la teoría de semigrupos, como el Teorema de Lummer Phillips y Pruss. La unidad de análisis fue una solución del sistema dado, la cual decae exponencialmente. El universo donde están ubicados las soluciones del sistema dado son los espacios de Hilbert y la estabilidad de la solución se verifica en $\left[0,+\infty\right\rangle$.

3. Resultados

En este trabajo se considera el problema para el siguiente sistema lineal disipativo,

$$u_{tt} - u_{xx} = (v-u) + (v-u)_t, \text{ en } \langle 0, L\rangle \times \langle 0, +\infty\rangle \qquad (1.1)$$

$$v_{tt} - v_{xx} = (u-v) + (u-v)_t, \text{ en } \langle 0, L\rangle \times \langle 0, +\infty\rangle \qquad (1.2)$$

Con condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x); \quad x \in \langle 0, L\rangle \qquad (1.3)$$

$$v(x,0) = v_0(x); \quad x \in \langle 0, L\rangle \qquad (1.4)$$

Y condiciones frontera

$$u(0,t) = u(L,t) = 0; \quad t \geq 0 \qquad (1.5)$$

$$v(0,t) = v(L,t) = 0; \quad t \geq 0 \qquad (1.6)$$

Existencia y Unicidad

Para resolver este problema usaremos la teoría de semigrupos. Para ello, expresamos el sistema (1.1) – (1.6) en un problema de Cauchy abstracto

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} = AU(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \qquad (1.7)$$

Donde $A: D(A) \subset H \to H$ es un operador lineal en el espacio de Hilbert H. Para garantizar la existencia y unicidad de la solución del problema (1.7) se empleó el corolario del Teorema de Lummer Phillips. 31

Probamos que A es un generador infinitesimal de un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0.

Para ello demostramos que A es un operador disipativo y $0 \in \rho(A)$, donde $\rho(A)$ es el resolvente del operador A.

En primer lugar, encontramos la energía asociada al sistema (1.1) - (1.6), dado por

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|u_x\|^2 + \|v_x\|^2 + \|u-v\|^2\right\} = -\|u_t - v_t\|^2 \qquad (1.8)$$

Donde la energía es, $E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|u_x\|^2 + \|v_x\|^2 + \|u-v\|^2\right)$ (1.9)

Luego de (1.8) y (1.9) se obtiene: $\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$, es decir $E(t)$ es decreciente.

De (1.9) y de la condición de frontera (1.5) – (1.6) se sigue que el espacio de fase es $H = H_0^1 \times L^2(0,L) \times H_0^1 \times L^2(0,L)$.

Luego a partir de (1.9) se define la norma en el espacio de fase H por,

$$\|U\|^2 = \|(u, u_t, v, v_t)\|^2 = \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|u_x\|^2 + \|v_x\|^2 + \|u-v\|^2 \qquad (1.10)$$

Ahora el sistema inicial (1.1) – (1.6) lo expresamos como un problema de Cauchy abstracto en H.

Haciendo $u_t = w$, $v_t = r$, en el sistema (1.1) – (1.2) obtenemos:

$$u_t = 0u + w + 0v + 0r$$

$$w_t = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u - w + v + r$$

$$v_t = 0u + 0w + 0v + r$$

$$r_t = u + w + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v - r$$

Así tenemos,

$$\begin{pmatrix} u_t \\ w_t \\ v_t \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \partial_x^2 - I & -I & I & I \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & I & \partial_x^2 - I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \\ v \\ r \end{pmatrix}$$

Además,

$$\begin{pmatrix} u(0) & w(0) & v(0) & r(0) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_0 & w_1 & v_0 & r_1 \end{pmatrix}^T .$$

Luego se tiene el problema de Cauchy abstracto,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} U(t) = AU(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Donde,

$$U(t) = \begin{pmatrix} u \\ w \\ v \\ r \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \partial_x^2 - I & -I & I & I \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & I & \partial_x^2 - I & -I \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Ahora definimos el operador lineal A por,

$$A : D(A) \subset H \to H \text{, donde } H = H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2 .$$

y $D(A) = \{ U \in H : AU \in H \}$ es el dominio, definido por :

$$D(A) = \left(H_0^1 \cap H^2 \right) \times H_0^1 \times \left(H_0^1 \cap H^2 \right) \times H_0^1$$

El cual es denso en H.

De otro lado, a partir de la energía del sistema obtenido en (1.9), se define el producto interno en el espacio de fase H, dado por

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \int_0^L u_x^1 u_x^2 dx + \int_0^L w^1 w^2 dx + \int_0^L v_x^1 v_x^2 dx + \int_0^L r^1 r^2 dx + \int_0^L \left(u^1 - v^1 \right)\left(u^2 - v^2 \right) dx \tag{1.13}$$

Donde $U_i = \begin{pmatrix} u^i & w^i & v^i & r^i \end{pmatrix}^T$, para $i = 1, 2$.

Luego con este producto interno, el espacio H es un espacio de Hilbert.

Para garantizar la existencia y unicidad de solución del problema abstracto de Cauchy (1.11) verificaremos las hipótesis del corolario del teorema de Lummer Phillips, esto es: A es un operador disipativo y $0 \in \rho(A)$.

AFIRMACION 1: El operador A es disipativo

Probaremos que $\langle AU,U\rangle_H \leq 0$, $\forall U \in D(A)$.

En efecto, empleando la definición de producto interno en (1.13) y simplificando obtenemos:

$$\langle AU,U\rangle_H = \int_0^L w_x u_x dx + \int_0^L u_{xx} w dx + \int_0^L r_x v_x dx + \int_0^L v_{xx} r dx + 2\int_0^L rw dx - \int_0^L w^2 dx - \int_0^L r^2 dx$$

Integrando por partes y usando la condición de frontera se obtiene,

$$\langle AU,U\rangle_H = -\|r-w\|^2 \qquad (1.14)$$

Esto es, $\langle AU,U\rangle_H \leq 0$, $\forall U \in D(A)$.

AFIRMACION 2: $0 \in \rho(A)$

Debemos probar que el operador $A^{-1} \in L(H)$, es decir, para cada $F \in H$ existe un único $U \in D(A)$ tal que $AU = F$ (1.15)

En efecto, para $F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{pmatrix}^T$ y $U = \begin{pmatrix} u & u_t & v & v_t \end{pmatrix}^T$ reemplazando en (1.15), tenemos:

$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_{xx} - u - u_t + v + v_t \\ v_t \\ u + u_t + v_{xx} - v - v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \qquad (1.15)$$

Luego obtenemos:

$$u_t = f_1 \in H_0^1(0,L) \qquad (1.16)$$

$$u_{xx} - u - u_t + v + v_t = f_2 \in L^2(0,L) \qquad (1.17)$$

$$v_t = f_3 \in H_0^1(0,L) \qquad (1.18)$$

$$u + u_t + v_{xx} - v - v_t = f_4 \in L^2(0,L) \qquad (1.19)$$

Luego el sistema se reduce a,

$$u_{xx} - u - u_t + v + v_t = f_2 \qquad (1.20)$$

$$u + u_t + v_{xx} - v - v_t = f_4 \qquad (1.21)$$

Sumando (1.20) y (1.21); luego multiplicando por 2 en (1.19) y sumando con (1.17) y (1.18) se obtiene respectivamente:

$$u_{xx} + v_{xx} = f_2 + f_4 \qquad (1.22)$$

$$u + u_{xx} - v + 2v_{xx} = 2f_4 + f_2 + f_3 - f_1 \qquad (1.23)$$

Además de la condición frontera (1.5) – (1.6) se tiene:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

$$v(0,t) = v(L,t) = 0 \qquad (1.24)$$

33

De la condición frontera (1.24) se observa que $u\in H_0^1(0,L)$ y $v\in H_0^1(0,L)$, luego se define un nuevo espacio dado por: $V=H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)$ (1.25)

Elegimos una norma para este espacio V, a partir de la norma de la energía (1.10), haciendo $u_t=v_t=0$, se define:

$$\left\|\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\|_V^2=\int_0^L|u_x|^2\,dx+\int_0^L|v_x|^2\,dx+\int_0^L|u-v|^2\,dx \qquad (1.26)$$

Luego se tiene el producto interno,

$$\left\langle\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\rangle_V=\int_0^L u_xu_x dx+\int_0^L v_xv_x dx+\int_0^L(u-v)(u-v)\,dx$$

Así el espacio V, provisto del producto interno dado es un espacio de Hilbert.

A partir de (1.22) y (1.23) se define el operador T por:

$$T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\int_0^L(f_2+f_4)u dx+\int_0^L(2f_4+f_2+f_3-f_1)v dx\,,\quad \forall\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in V \qquad (1.27)$$

Ahora probaremos que T es lineal y acotada.

En efecto, primero veremos que T es lineal y luego probaremos que T es acotado:

Sea $\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix}\in V$, $\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}\in V$

. T es lineal: es inmediato.

. Ahora probamos que T es acotado:

$$\left|T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right|\le\int_0^L|f_2+f_4||u|dx+\int_0^L|2f_4+f_2+f_3-f_1||v|dx$$
$$\le(\|f_2\|_{L^2}+\|f_4\|_{L^2})\|u\|_{L^2}+2(\|f_4\|_{L^2}+\|f_2\|_{L^2}+\|f_3\|_{L^2}+\|f_1\|_{L^2})\|v\| \quad (1.28)$$

Usando la desigualdad de Poincare tenemos,

$$\left|T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right|\le(\|f_2\|_{L^2}+\|f_4\|_{L^2})\|u\|_{L^2}+2C_p(\|f_4\|_{L^2}+\|f_2\|_{L^2}+\|f_3\|_{H^1}+\|f_1\|_{H^1})\|v\|$$
$$\le\|F\|\|u\|_{L^2}+2C_p\|F\|\|v\|$$
$$\le C_1\|F\|(\|u\|_{L^2}+\|v\|_{L^2})$$
$$\le C_2\|F\|(\|u\|_{H^1}+\|v\|_{H^1})$$
$$\le C\left\|\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\|_V \qquad (1.29)$$

De otro lado como $T\in L(V)=V^*$ (dual de V), entonces del Teorema de representación de Riesz, existe un único elemento $\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}\in V$ tal que:

$$T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\rangle\;;\quad\forall\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in V \qquad (1.30)$$

Así de la definición dado en (1.24) se sigue,

$$T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \int_0^L u_x\varphi_x dx + \int_0^L v_x\psi_x dx + \int_0^L (u-v)(\varphi-\psi)dx \qquad (1.31)$$

Luego de (1.26) y (1.31) tenemos,

$$\int_0^L u_x\varphi_x dx + \int_0^L v_x\psi_x dx + \int_0^L (u-v)(\varphi-\psi)dx = \int_0^L (f_2+f_4)udx + \int_0^L (2f_4+f_2+f_3-f_1)vdx \qquad (1.32)$$

Tomando $v=0$ en (1.32) obtenemos,

$$\int_0^L u_x\varphi_x dx + \int_0^L (\varphi-\psi)udx = \int_0^L (f_2+f_4)udx$$

Luego integrando por partes y factorizando se obtiene,

$$-\int_0^L u\varphi_{xx} dx + \int_0^L (\varphi-\psi)udx - \int_0^L (f_2+f_4)udx = 0$$

Así tenemos, $\int_0^L \left[(\varphi-\psi)-\varphi_{xx}-(f_2+f_4)\right]udx = 0 \qquad (1.33)$

En (1.33) aplicando el Teorema de Du Bois-Raymond tenemos,

$\varphi-\psi-\varphi_{xx}-(f_2+f_4)=0 \quad c.t.p$ en $\langle 0,L\rangle$

$\rightarrow \varphi-\psi-\varphi_{xx}=(f_2+f_4)\in L^2(0,L)$

$\rightarrow \varphi\in H^2(0,L) \qquad (1.34)$

Ahora tomamos $u=0$ en (1.31) y se obtiene,

$$\int_0^L v_x\psi_x dx - \int_0^L (\varphi-\psi)vdx = \int_0^L (2f_4+f_2+f_3-f_1)vdx$$

Luego, integrando por partes y factorizando obtenemos,

$$\int_0^L \left[(\psi-\varphi-\psi_{xx})-(2f_4+f_2+f_3-f_1)\right]vdx = 0$$

$\rightarrow$ Aplicando el Teorema de Du Bois Raymond tenemos,

$\psi-\varphi-\psi_{xx}-(2f_4+f_2+f_3-f_1)=0 \quad c.t.p$ en $\langle 0,L\rangle$.

$\rightarrow \psi-\varphi-\psi_{xx}=(2f_4+f_2+f_3-f_1)\in L^2(0,L)$

$\rightarrow \psi\in H^2(0,L) \qquad (1.35)$

De (1.34) y (1.35) se sigue,

$$\varphi\in H^2(0,L)\subset L^2(0,L)$$
$$\psi\in H^2(0,L)\subset L^2(0,L)$$

Además se demuestra que A es un operador lineal y acotado.

Por lo tanto, $0\in\rho(A)$.

Por el corolario al Teorema de Lummer Phillips obtenemos que A es un generador infinitesimal de un semigrupo $S(t)$ de contracciones de clase C_0.

Esto significa que el problema de Cauchy abstracto en el espacio de Hilbert,

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} = AU(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

admite una única solución de la forma $U(t) = S(t)U_0$, donde $U_0 \in D(A)$.

Como $D(A) = (H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1 \times (H_0^1 \cap L^2) \times H_0^1$ entonces $u \in C([0,+\infty), D(A) \cap C^1([0,+\infty), H)$ donde $H = H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2$.

Estabilidad Exponencial

A continuación, deseamos saber si la solución del problema disipativo (1.1) – (1.6) es exponencialmente estable. Para ello usamos el Teorema de Pruss.

Teorema 1 (Teorema de Pruss)
Sea un generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase. Diremos que es exponencialmente estable, si y solo si:
(i) $i\mathbb{R} \sqsubset \rho\ (A)$
(ii) $\exists C > 0, \forall \lambda > 0$ tal que $\left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| \leq C$.

36

Demostración:

(i) Probamos por el absurdo. Supongamos que existe un autovalor imaginario $i\lambda$ del operador A, luego existe un vector propio,

$W \neq 0$ tal que $AW = i\lambda W$ (1.36)

En (1.36) tomando el producto interno con $W = (u \quad w \quad v \quad z)^T \in D(A)$ se obtiene,

$\langle AW, W \rangle = i\lambda \|W\|_H^2$ (1.37)

Aplicando la parte real en (1.37) y de (1.14) tenemos,

$-\|w - z\|_H^2 = 0 \rightarrow w - z = 0 \rightarrow w = z$ (1.38)

De (1.36) en término de sus componentes se tiene:

$w - i\lambda u = 0$ (1.39)

$u_{xx} - u - w + v + z - i\lambda w = 0$ (1.40)

$z - i\lambda v = 0$ (1.41)

$u + w + v_{xx} - v - z - i\lambda z = 0$ (1.42)

Restando (1.39) y (1.41) se tiene: $w - i\lambda u - z + i\lambda v = 0$

De (1.38) en la expresión anterior tenemos: $u = v$ (1.43)

Sumando (1.40) y (1.42) tenemos: $u_{xx} + v_{xx} - i\lambda(w + z) = 0$

Tomando la parte real en la expresión anterior tenemos,

$u_{xx} + v_{xx} = 0$ (1.44)

De (1.43) y de la condición frontera (1.5) – (1.6) se sigue,

$$\begin{cases} 2u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(L,t) \end{cases} \qquad (1.45)$$

Así el problema (1.45) admite una única solución $u = 0$, luego de (1.43) tenemos $v = 0$. Reemplazando en (1.39) y (1.41) tenemos: $w = 0$ y $z = 0$; es decir: $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, lo que contradice (1.36).

Esto demuestra que $i\mathbb{R} \sqsubset \rho\,(A)$

(ii) Demostramos que $\left\| (i\lambda I - A)^{-1} \right\| \le C\,, \forall\lambda \in \mathbb{R}$.

Lo que queremos demostrar es: $\|U\|_H \le C\|F\|_H$, donde $U = (\lambda I - A)^{-1} F$.

En efecto:

Sea $F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{pmatrix}^T \in H$ y $U = \begin{pmatrix} u & w & v & z \end{pmatrix}^T \in D(A)$, tal que

$(i\lambda I - A)U = F$. (1.46)

Luego de (1.46) en términos de sus componentes tenemos,

$$i\lambda u - w = f_1 \qquad (1.47)$$

$$i\lambda w - u_{xx} + u + w - v - z = f_2 \qquad (1.48)$$

$$i\lambda v - z = f_3 \qquad (1.49)$$

$$i\lambda z - u - w - v_{xx} + v - z = f_4 \qquad (1.50)$$

Multiplicando por u en (1.48) e integrando de 0 a L, luego integrando por partes y de la condición frontera tenemos,

$$\int_0^L w(i\lambda u)dx + \int_0^L (u_x)^2 dx + \int_0^L u^2 dx + \int_0^L wudx - \int_0^L vudx - \int_0^L zudx = \int_0^L uf_2 dx \qquad (1.51)$$

Reemplazando (1.47) y (1.49) en (1.51) tenemos,

$$\int_0^L w(f_1 + w)dx + \int_0^L (u_x)^2 dx + \int_0^L u^2 dx + \int_0^L (i\lambda u - f_1)udx - \int_0^L vudx - \int_0^L (i\lambda v - f_3)udx = \int_0^L uf_2 dx$$

Luego obtenemos,

$$\int_0^L w^2 dx + \int_0^L (u_x)^2 dx + \int_0^L u^2 dx + \int_0^L i\lambda u^2 dx - \int_0^L vudx - \int_0^L i\lambda uvdx = \int_0^L f_1 udx + \int_0^L f_2 udx - \int_0^L f_1 wdx - \int_0^L f_3 udx$$

(1.52)

Ahora multiplicando por v en (1.50) e integrando de 0 a L, luego usando integración por partes y condiciones de frontera, obtenemos,

$$\int_0^L (i\lambda v)zdx - \int_0^L vudx - \int_0^L vwdx + \int_0^L v_x^2 dx + \int_0^L v^2 dx + \int_0^L zvdx = \int_0^L f_4 vdx \qquad (1.53)$$

Reemplazando (1.47) y (1.490) en (1.53) y operando tenemos,

$$\int_0^L z^2 dx - \int_0^L vudx - i\lambda \int_0^L vudx + \int_0^L v_x^2 dx + \int_0^L v^2 dx + i\lambda \int_0^L v^2 dx = \int_0^L f_4 vdx - \int_0^L f_3 zdx - \int_0^L f_1 vdx + \int_0^L f_3 vdx$$

(1.54)

Aplicando la parte real en (1.52) y (1.54) obtenemos,

$$\int_0^L w^2dx+\int_0^L (u_x)^2dx+\int_0^L u^2dx-\int_0^L vudx=\int_0^L f_1udx-\int_0^L f_1wdx-\int_0^L f_3udx+\int_0^L f_2udx \quad (1.55)$$

$$\int_0^L z^2dx-\int_0^L vudx+\int_0^L v_x^2dx+\int_0^L v^2dx=\int_0^L f_4vdx+\int_0^L f_3vdx-\int_0^L f_1vdx+\int_0^L f_3zdx \quad (1.56)$$

Sumando (1.55) y (1.56) tenemos,

$$\begin{aligned}\int_0^L v_t^2dx+\int_0^L u_t^2dx+\int_0^L u_x^2dx+\int_0^L v_x^2dx+\int_0^L u^2dx+\int_0^L v^2dx-2\int_0^L vudx=\int_0^L f_1udx-\int_0^L f_1wdx-\int_0^L f_3udx\\ +\int_0^L f_2udx+\int_0^L f_4vdx+\int_0^L f_3vdx\\ -\int_0^L f_1vdx+\int_0^L f_3zdx \quad (1.57)\end{aligned}$$

En (1.57) aplicando valor absoluto tenemos,

$$\begin{aligned}\int_0^L v_t^2dx+\int_0^L u_t^2dx+\int_0^L u_x^2dx+\int_0^L v_x^2dx+\int_0^L (u-v)^2dx\le\int_0^L |f_1||u|dx+\int_0^L |f_1||w|dx+\int_0^L |f_3||u|dx\\ +\int_0^L |f_2||u|dx+\int_0^L |f_4||v|dx+\int_0^L |f_3||v|dx\\ +\int_0^L |f_1||v|dx+\int_0^L |f_3||z|dx \quad (1.58)\end{aligned}$$

Usando la definición de la norma en $H_0^1\times L^2\times H_0^1\times L^2$ y factorizando el lado derecho de (1.58) se tiene,

$$\|U\|_H^2\le\int_0^L (|f_1|+|f_3|+|f_2|)|u|dx+\int_0^L (|f_1|+|f_4|+|f_3|)|v|dx+\int_0^L |f_1||w|dx+\int_0^L |f_3||z|dx \quad (1.59)$$

Aplicando la desigualdad de Holder en el lado derecho de (1.59) obtenemos,

$$\begin{aligned}\|U\|_H^2&\le\|u\|(\|f_1\|+\|f_2\|+\|f_3\|)+\|v\|(\|f_1\|+\|f_3\|+\|f_4\|)+\|f_1\|\|w\|+\|f_3\|\|z\|\\ &\le\|u\|(\|f_1\|+\|f_2\|+\|f_3\|)+(\|v\|+\|w\|+\|z\|)\|f_4\|+\|v\|(\|f_1\|+\|f_3\|+\|f_4\|)\\ &\quad+(\|u\|+\|w\|+\|z\|)\|f_2\|+\|u\|\|f_2\|+\|v\|\|f_4\|+\|w\|\|f_1\|+\|f_3\|\|z\|\\ &\le\left[\|u\|^2+(\|v\|+\|w\|+\|z\|)^2\right]^{1/2}\left[(\|f_1\|+\|f_2\|+\|f_3\|)^2+\|f_4\|^2\right]^{1/2}\\ &\quad+\left[\|v\|^2+(\|u\|+\|w\|+\|z\|)^2\right]^{1/2}\left[(\|f_1\|+\|f_4\|+\|f_3\|)^2+\|f_2\|^2\right]^{1/2}\\ &\quad+\left[\|u\|^2+\|v\|^2+\|w\|^2+\|z\|^2\right]^{1/2}\left[\|f_1\|^2+\|f_4\|^2+\|f_3\|^2+\|f_2\|^2\right]^{1/2} \quad (1.60)\end{aligned}$$

Luego obtenemos,

$$\begin{aligned}\|U\|_H^2&\le(\|u\|+\|v\|+\|w\|+\|z\|)(\|f_1\|+\|f_2\|+\|f_3\|+\|f_4\|)\\ &\quad+(\|u\|+\|v\|+\|w\|+\|z\|)(\|f_1\|+\|f_2\|+\|f_3\|+\|f_4\|)\\ &\quad+(\|u\|+\|v\|+\|w\|+\|z\|)(\|f_1\|+\|f_2\|+\|f_3\|+\|f_4\|)\end{aligned}$$

$$\|U\|_H^2\le3(\|u\|+\|v\|+\|w\|+\|z\|)(\|f_1\|+\|f_2\|+\|f_3\|+\|f_4\|) \quad (1.61)$$

Usando la desigualdad de Poincare y propiedades de Sobolev en (1.61) tenemos,

$$\|U\|_H^2 \leq 3(C_1\|u\|_{H^2}+C_2\|v\|_{H^2}+C_3\|w\|_{H_0^1}+C_4\|z\|_{H_0^1})(C_5\|f_1\|_{H_0^1}+\|f_2\|+C_6\|f_3\|_{H_0^1}+\|f_4\|)$$

$$\rightarrow \|U\|_H^2 \leq C_8(\|u\|_{H^2}+\|v\|_{H^2}+\|w\|_{H_0^1}+\|z\|_{H_0^1})(\|f_1\|_{H_0^1}+\|f_2\|+\|f_3\|_{H_0^1}+\|f_4\|)$$

$$\rightarrow \|U\|_H^2 \leq C_8\|U\|_H\|F\|_H \rightarrow \|U\|_H \leq C\|F\|_H \qquad (1.62)$$

Por lo tanto, $\exists C>0, \forall \lambda>0 \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq C$.

Luego del teorema de Pruss se sigue que el operador A es exponencialmente estable.

4. Discusión

Considerando que la estabilidad exponencial en esta investigación se obtuvo usando el teorema de Pruss a diferencia de A. Haraux y E. Zuazua (1998) los cuales también estudian la ecuación de onda del tipo Kirchoff con término disipativo de tipo friccional, pero lo realizaron usando la técnica de multiplicadores así como Kormonif y Rao (1997) con término disipativo de tipo damping friccional en la frontera en forma similar lo usó Alabau (1999) colocando dicho término disipativo en una de las ecuaciones.
Para encontrar la existencia y unicidad se utilizó la teoría de semigrupos al igual que Haraux y E. Zuazua (1998) y Raposo, Bastos (2009) a diferencia de J. Muñoz (1992) que uso el método de Galerkin.

5. Conclusiones

La solución del sistema lineal acoplado de la ecuación de onda con término disipativo posee estabilidad exponencial haciendo uso del teorema de Pruss.
Se demostró la existencia y unicidad de solución mediante la teoría de semigrupos lineales.

6. Agradecimiento

Un agradecimiento especial a la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos y mi familia por su apoyo incondicional..

7. Literatura Citada

Alabau, F. (1999). Stabilisation frontiere indirecte de systems faiblement couples. C.R. Acad.Sci. Paris, Serie I, Vol. 328, N°11, p. 1012-1020.

Alabau, F.; Cannarsa, P.; Kormonik, V. (2002). Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations. Journal of Evolution Equations. Vol.2, , p. 127-150.

Beyrath, A. (2001). Stabilisation indirecte interne par un feedback localement distribue de systemes d'equations couplees. C. R. Acad.Sci. Paris, Series I, Vol.333, N°5, , p. 451-456.

Beyrath, A. (2002). Indirect linear locally distributed damping of coupled systems. Bol. Soc. Paran. Mat., Vol.22, N°2 , p. 17-34.

Kormonik, V.; Rao, B. (1997). Boundary stabilization of compactly coupled wave equations. Asymptotic Analysis, Vol.14 , p. 339-359.

Liu, W. (2020).General decay of solution of a linear system of viscoelastic equations.Acta Appl. Math., Vol.110, N°1, , P. 153-165.

Messaoudi, S. Tatar, N. (2002). Uniform stabilization of solutions of a nonlinear system of viscoelastic equations. Applicable Analysis, Vol.87, N°3, , P. 247-263.

Muñoz Rivera, J.E. (1992). Energy decay rates in linear thermoelasticity, Funkcial EKVAC, 35: 9-30,

Raposo, C.; Bastos, W. (2009). Energy decay for the solutions of a coupled wave system. Tema Tend. Mat.Apl.Comput, Vol.10, N°2, p. 203-209.

Raposo, C. Ferreira, J. Santos, M. y Castro, N. (2005). Exponential Stability for the Timoshenko System with two weak damping, Appl. Math. Lett., 18: 535-541,

Santos, M. (2002). Decay rates for solutions of a system of wave equations with memory. Electron.J.Diff.Equations, Vol.2002, N°38, p. 1-17.

Wiler, A. (1994). Stability of wave equations with dissipative bounded conditions in bounded domain, Diff. and Integral Eqs., 7 (2), 345-366.

Zuazua, E. and Haraux, A. (1998). Decay estimates for some semilinear damping hyperbolic problems, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 10: 191-206.

REVISTA DE INVESTIGACIÓN MULTIDISCIPLINARIA

CTS CAFE Para ciudadanos…

http://www.ctscafe.pe

Volumen V- N° 13 Marzo 2021

176

Contáctenos en nuestro correo electrónico
revistactscafe@ctscafe.pe

Página Web:
http://ctscafe.pe

Blog:
https://ctscafeparaciudadanos.blogspot.com/

Facebook
https://www.facebook.com/Revista-CTSCafe-1822923591364746/