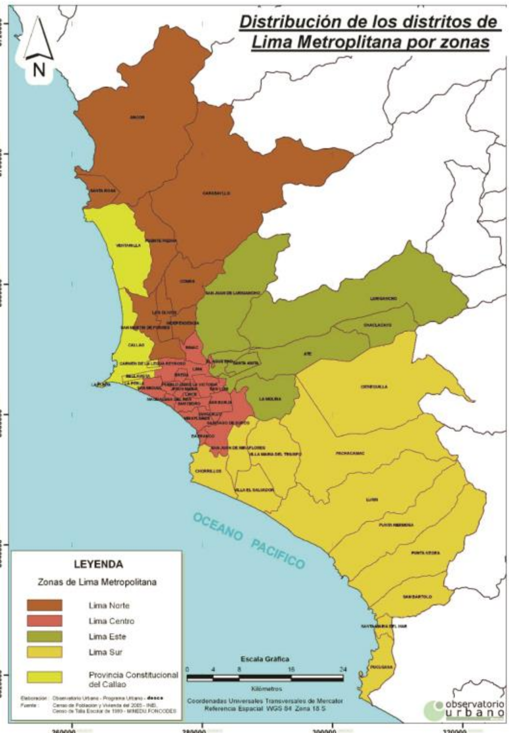
Revista de Investigación Multidisciplinaria

CTS CAFE PARA CIUDADANOS......

http://www.ctscafe.pe

ISSN 2521-8093



Wordle de Análisis de Literatura creado por el autor.

Volumen I- N° 1 Marzo 2017
http://www.ctscafe.pe
Lima - Perú

Existencia y unicidad de solución para una ecuación de la onda semilineal con disipación local

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Matemático-UNMSM
Lic. César Castañeda Campos
Matemático-UNMSM
LIc. Andrés Guardia Cayo
Matemático-UNMSM
Lic. Victoriano Yauri Luque
Matemático-UNMSM
Lic. Víctor Tarazona Miranda
Matemático-UNMSM
Recepción: 13 febrero 2017 / Conformidad: 01 marzo 2017

Resumen.- En el presente artículo, mediante un proceso de cambios adecuados en el sistema planteado obtenemos un problema de Cauchy Abstracto no homogéneo y aplicando la teoría de semigrupos lineales obtenemos la existencia y unicidad de solución al problema.

Palabras claves: Existencia y unicidad de solución, Problema semilineal, Teoría de semigrupos.

Abstrat: In the present article, by means of a process of suitable changes in the raised system we obtain a problem of non-homogeneous Cauchy Abstract and applying the theory of linear semigroups we obtain the existence and uniqueness of solution to the problem.

Keywords: Existence and uniqueness of solution, Semilineal problem, Theory of semigroups.

Résumé: Le présent article par un procès de changements appropriés dans le système proposé on obtient un problème de Cauchy abstrait ne pas homogène et en appliquant la théorie de semi groups linéaires on va obtenir la existence et unicité de la solution du problème.

Mots Clés: Existence et Unicité de la Solution, Problème Semi Linéaire, Théorie de Semi Groups.

1. Introducción

El término disipativo en una ecuación, sirven para garantizar que la energía asociada a la ecuación tengan un comportamiento asintótico o polinomial y tenga sentido el problema caso contrario puede tener explosión en un determinado tiempo.

En el año 1990, E. Zuazua [17] estudia la ecuación de onda semilineal con disipación localizada en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dominio acotado, donde se tiene el "término disipativo local" $a(x)u_t$ y el término semilineal $f(u)$, expresado en

$$\left| \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0\,, & \text{en} \quad \Omega \times (0,+\infty) \\ u(0) = u_0\,, \qquad u_t(0) = u_1, & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \Gamma \times (0,+\infty) \end{array} \right.$$

Con $\Gamma = \partial\Omega$ frontera de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, prueba que el problema, es bien puesto en el espacio $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, es decir, existe una única solución débil en la clase,

$$u \in C\big([0,+\infty); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \cap C^1\big([0,+\infty); L^2(\Omega)\big)$$

Muchos autores trabajan con amortiguamiento local, ver [3, 6, 10, 11, 12, 13, 14] y [15].

Las ecuaciones de la onda describen propagación de partículas. Desde un punto de vista matemático la ecuación de ondas es el opuesto exacto de la del calor pues se trata de un sistema reversible en tiempo, conservativo, carente de efectos regularizantes y en el que la velocidad de propagación es finita. Están aplicadas a la mecánica cuántica (la ecuación de Schrödinger, que representa el movimiento de las partículas microscópicas, haciendo un papel análogo a la segunda ley de Newton en la mecánica clásica), de la Física (problemas de elasticidad) y en la ingeniería (vibraciones de estructuras, construcción de puentes), entre otros, como se describe en la siguiente figura.

Fig. 1 Puente Akashi- Kaikyo, Japón

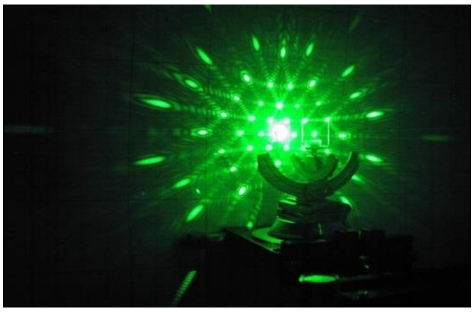


Fig. 2 Estructura de cristales ópticos vía difracción óptica.

El término disipativo local $a(x)u_t$ en el sistema planteado hace que la solución del sistema tenga un comportamiento asintótico, es decir, decae exponencialmente cuando t tiende al infinito y como consecuencia tenga sentido el Problema planteado. Los términos semilineal $f(u)$ y αu determinan algunas irregularidades más que afectan a la propagación de ondas.

Nosotros estudiamos, uno de sus múltiples problemas propuestos en el artículo de E. Zuazua [17], "Ecuación de onda semilineal con amortiguamiento local", dado por

$$\left| \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + f(u) + a(x)u_t = 0 \ , & \text{en} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + u = 0 \qquad\qquad , & \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad u_t(x,0) = u_1(x) \ , & \text{en} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{0.1}$$

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado y con las hipótesis:

$(H1)$ $a \in L^\infty_+(\Omega)$, $a(x) \geq a_0 > 0$, $c.s.\ en\ \omega \subset \Omega$, ω es una vecindad abierta de $\Gamma = \partial\Omega$.

$(H2)$ $f(s)s \geq 0$, $\forall\, s \in \mathbb{R}$.

$(H3)$ $f \in C^1(\mathbb{R})$, satisfaciendo la condición de crecimiento, es decir

$$|f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y|; \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

$(H4)$ f es globalmente Lipschitziana, es decir, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Con estas hipótesis por medio de la teoría de semigrupos lineales demostraremos que el problema (0.1), está bien puesto en el espacio $H^1_*(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, es decir, para cualquier dato inicial

$$(u_0, u_1) \in \left(H^1_*(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \times L^2(\Omega),$$

Existe una única solución regular en el espacio

$$u \in C\left([0,T]; H^1_*(\Omega)\right) \cap C^1([0,T]; H^1_*(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^2\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \tag{0.2}$$

$$H^1_*(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \ / \ u + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ , \ \text{sobre} \ \Gamma \right\} \tag{0.3}$$

Que resolveremos usando la teoría de semigrupos lineales.

La energía asociada al sistema (0.1), formalmente es dado por

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{ \int_\Omega [|u_t(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2] dx + 2\int_\Omega F\big(u(x,t)\big) dx + \int_\Gamma |u(x,t)|^2 d\Gamma \right\} \tag{0.4}$$

donde

$$F(s) = \int_0^s |f(t)| dt \ , \ \ \forall\, s \in \mathbb{R} \, .$$

Se demuestra que,

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t} \ , \ \ \forall\, t > 0 \ , \ \ \gamma > 0 \tag{0.5}$$

Para información sobre los espacios de Sobolev ver [1, 2, 5], y sobre la Teoría de semigrupos lineales ver [7, 8 ,9].

1.1 Problema Semilineal Abstracto

Consideremos el problema de valor inicial abstracto dado por,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au(t) = F\big(u(t)\big)\,; \;\; t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

donde A es el generador de un semigrupo contracción sobre un espacio de Banach H y $F: H \to H$ una función continua.

Definición 1

Diremos que u es una solución regular débil del problema de valor inicial (1.1) si

$u_0 \in D(A)$ y $u \in C^1([0,T]; H) \cap C([0,T]; D(A))$

Diremos que u es una solución generalizada, si u satisface el P.V.I. (1.1) y $u_0 \in H$ y $u \in C(]0,T[; H)$. En ambos casos, u satisface la ecuación integral

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^T S(t-s)f(s)ds$$

Definición 2

Diremos que una aplicación $F: H \to H$ es localmente Lipschitziana, si para cada constante positiva M existe una constante L_M tal que

$$|F(u) - F(v)| \leq L_M |u - v|$$

Para todo $u, v \in H$, tal que $|u| \leq M \quad y \quad |v| \leq M$

Lema 3

Sean $T > 0$ y $u_0 \in H$. Si $u, v \in C([0,T]; H)$ son dos soluciones de (1.1), entonces $u = v$.

Demostración. Ver Peña Miranda C. [14].

Teorema 4

Sea $F: H \to H$ localmente *Lipschitziana*, entonces para cada $u_0 \in H$, existe una única solución generalizada de (1.1) definida en $[0,T]$. Más aún si $u_0 \in D(A)$, la solución es clásica.

Demostración. Ver Peña Miranda C. [14].

Teorema 5

Si u es una solución maximal de (1.1), entonces

$$T_{max} = +\infty \quad \text{ó} \quad T_{max} < +\infty$$

y

$$\lim_{t \to T_{max}} |u(t)| = +\infty$$

En el primer caso, diremos que u es una solución global y en el segundo caso, diremos que la solución explota en tiempo finito.

Demostración. Ver Peña Miranda C. [14].

2. Existencia y unicidad de la solución regular

En esta sección estudiamos la existencia y unicidad de la solución regular de la ecuación (0.1) con las hipótesis $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado bien regular y satisfaciéndose (H1)-(H4) con datos iniciales $(u_0, u_1) \in H_*^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $H_*^1(\Omega)$ definido en (0.3).

2.1 Existencia y unicidad

Teorema 6

Sea $F: H \longrightarrow H$ localmente Lipschitziana. Entonces para todo $(u_0, u_1) \in D(A)$ existe una única solución regular débil del sistema (0.1), es decir,

$$u \in C\big([0, +\infty); H_*^1(\Omega)\big) \cap C^1\big([0, +\infty); H_*^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \cap C^2\big([0, +\infty); L^2(\Omega)\big)$$

Demostración

Existencia de la solución regular

En el sistema (0.1), poniendo $v = u_t$ obtenemos el problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} U_t + Au = F \\ \\ U(0) = U_0 \end{array} \right.$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \ y \ F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(u) - a(x)v \end{pmatrix}$$

Sea $H = H_*^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

y

$$\begin{aligned} A: H &\longrightarrow H \\ U &\longmapsto AU \end{aligned}$$

A es un operador lineal puesto que las componentes de A son operadores lineales.

Por definición $D(A) = \{U \in H : \ AU \in H\}$

Encontrando que su dominio es dado por

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix} \in H \ / \ u \in H_*^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \ ; \ v \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$= H_*^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

Definamos el producto interno en H

$$(U_1, U_2)_H = \int_\Omega (\nabla u_1 . \nabla u_2 + v_1 v_2) dx + \int_\Gamma u_1 u_2 d\Gamma \ ; \ U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H$$

Es fácil deducir que:

i) A es monótono

Afirmación 1: A es maximal en $D(A) = D(I + A)$

En efecto, sea

$$F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H = H_*^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \ , \ \ U \in D(A) \ / \ (I + A)U = F \tag{2.1}$$

$$\left| \begin{array}{l} u - v = f \in H^1(\Omega) \\ -\Delta u + v = g \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

Sumando

$$u - \Delta u = (f + g) \in L^2(\Omega)$$

Vamos a aplicar el teorema de Lax – Milgram.

Sea

$$a: H_*^1(\Omega) \times H_*^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

definido por

$$a(u, v) = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

Define un producto interno en $H_*^1(\Omega)$ el cual induce una norma dada por

$$\forall u \in H_*^1(\Omega): \|u\|_{H_*^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Esto es, $\forall u \in H_*^1(\Omega)$, $\|u\|_{H_*^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$

Se tiene

$a)$ $a(.,.)$ es bilineal, puesto que todo producto interno es bilineal.

$b)$ $a(.,.)$ es continua

En efecto, $\forall u, v \in H_*^1(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
a(u,v) = {} & \left|(u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}\right| \\
& \leq \|u\|\|v\| + \|\nabla u\|\|\nabla v\| \\
& \leq \frac{1}{2}[(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2) + (\|uv\|^2 + \|\nabla \mathrm{v}\|^2)] \\
& = \frac{1}{2}\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\right)\left(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
& = \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2_{\left(H_*^1(\Omega)\right)^2}
\end{aligned}
$$

c) $a(.,.)$ es coerciva

En efecto,

$$|a(u,u)| = \left|(u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}\right| \geq \|u\|^2_{H_*^1(\Omega)}$$

Además, la aplicación

$$
\begin{aligned}
L: H_*^1(\Omega) \quad & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\
v \quad & \mapsto \quad \langle L, v\rangle = (\psi, v)_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

16

para todo $\psi \in L^2(\Omega)$ es una forma lineal y continua, es decir, $L \in \left(H_*^1(\Omega)\right)'$, y por el teorema de Lax- Milgram, existe una única $u \in H_*^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = \langle L, v\rangle \coloneqq (\psi, v)_{L^2(\Omega)} \ , \forall\ v \ \in H_*^1(\Omega)$$

Para todo $\varphi \in D(\Omega)$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\langle L, \varphi\rangle & = (\psi, \varphi)_{L^2(\Omega)} \\
& = a(u, \varphi) \\
& = (u,\varphi)_{L^2(\Omega)} + (-\Delta u, \varphi)_{L^2(\Omega)} - (u,\varphi)_{L^2(\Gamma)} \\
& = (u - \Delta u, \varphi)_{L^2(\Omega)}\ , \ \varphi \in D(\Omega)
\end{aligned}
$$

por densidad de $D(\Omega)$ en $H_*^1(\Omega)$

$$\overline{D(\Omega)}^{H_*^1(\Omega)} = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$$

Pues $\|u\|_{H_*^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}\ \forall u \in H_*^1(\Omega)$,

Luego; $\langle L, v\rangle = (u - \Delta u, v)_{L^2(\Omega)}\ , \forall\ v \ \in H_*^1(\Omega))$

esto es,

$$\psi = u - \Delta u \ \in L^2(\Omega) \tag{2.2}$$

como $-\Delta u \ \in L^2(\Omega)$, por la regularidad elíptica, existe $u \in H^2(\Omega)$ que verifica (2.2).

Por consiguiente hemos obtenido, que para

$$F = \binom{f}{g} \in H = H_*^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \ ,$$

existe una única

$$\binom{u}{v} \in \mathcal{D}(A) = H_*^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \ ,$$

tal que

$$\binom{u}{v} + A\binom{u}{v} = \binom{f}{g}$$

Esto prueba que, A es maximal.

Afirmación 2: $F: H \longrightarrow H$ está bien definida por

$$F(U) = \binom{0}{-f(u) - a(x)v} \in H = H_*^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \ \ ; \ \ U = \binom{u}{v} \in H$$

En efecto

$U = \binom{u}{v} \in H$ se debe probar que $(-f(u) - a(x)v) \in L^2(\Omega)$, es decir,

$$\int_{\Omega} |-f(u) - a(x)v|^2 < \infty$$

como $U = \binom{u}{v} \in H = H_*^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

entonces $u \in \ H_*^1(\Omega)\ ,\ \ v \in L^2(\Omega)$

Afirmación 3:

$$\int_{\Omega} \left|f\big(u(x)\big)\right|^2 dx < \infty$$

En efecto, se cumple

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \ \text{ para } \ p \geq 1 \ ; \ \ a, b > 0$$

para $p = 2$, tenemos

$$(a + b)^2 \leq 2\,(a^2 + b^2)$$

por la condición del crecimiento

$$\int_{\Omega} |f(u(x))|^2 dx \le C \int_{\Omega} [(1+|u|^{p-1})|u|]^2 dx$$

$$= 2C \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} \right) \quad (2.4)$$

por las condiciones iniciales

$$(n-2)p \le n \,, 1 < p$$

de aquí por interpolación se tiene la inmersión

$$H^1(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} L^r(\Omega),\ r \in \left(2, \frac{2n}{n-2} \right],\ n \ge 3$$

En particular para

$$r = 2p \in \left(2, \frac{2n}{n-2} \right],\ n \ge 3$$

$$H^1(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} L^{2p}(\Omega)$$

esto significa que

$$\|u\|_{L^{2p}(\Omega)} \le C\|u\|_{H^1(\Omega)} \ \text{ y } \|u\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} \le C^{2p}\|u\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} \quad (2.5)$$

Por otro lado se tiene que, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ entonces

$$\|u\|_{L^2} \le C\|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.6)$$

Luego de (2.5) y (2.6) en (2.4), existe una constante $k > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |f(u(x))|^2 dx \le k\|u\|^2_{H^1(\Omega)} < \infty \ \ ; \ \text{ pues } u \in H^1_*(\Omega)$$

De la afirmación 3 en (2.3) se tiene que:

$$(-f(u) - a(x)v) \in L^2(\Omega)$$

y en consecuencia F está bien definida.

Además por la propiedad del crecimiento, desigualdad de Hölder e inmersiones de Sobolev se prueba que F es localmente Lipschitziana. Entonces por el Teorema 5 para

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(A)$$

existe una solución regular débil

$$U: [0, T_{max}] \to X,$$

tal que

$$\binom{u}{u_t} \in C([0, T_{max}]; H) \cap C^1([0, T_{max}], D(A))$$

de modo que

$$u \in C\big([0, T_{max}]; H_*^1(\Omega)\big) \cap C^1\big([0, T_{max}]; H_*^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \cap C^2\big([0, T_{max}]; L^2(\Omega)\big) \qquad (2.7)$$

Unicidad de la solución regular

Consideremos u y v dos soluciones de la ecuación (0.1) y sea $w = u - v$, entonces

$$\left|\begin{array}{ll} w_{tt} - \Delta w + f(u) - f(v) + a(x) w_t = 0 & ; \text{ en } \quad Q = \Omega \times (0, +\infty) \\ w(0) = w_t(0) & , \text{ en } \quad \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial v} + w = 0 & ; \text{ sobre } \quad \Sigma = \Gamma \times (0, +\infty) \end{array}\right. \qquad (2.8)$$

Multiplicando esta ecuación por w_t e integrando sobre $\mathbb{R}^n$ se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |w_t|^2\, dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla \mathrm{w}|^2\, dx + \int_\Gamma w w_t d\Gamma + \frac{d}{dt}\int_\Omega (f(u) - f(v)) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|w_t|^2\, dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial v} w_t d\Gamma + \int_\Omega (f(u) - f(v))_{w_t} dx$$

$$+ \int_\Omega a(x)|w_t|^2 dx = 0$$

De la condición de frontera obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Gamma)}^2\right\}$$

$$\leq \int_\Omega |f(u) - f(v)||w_t| dx \; + \int_\Omega a(x)|w_t|^2 dx$$

Como $f \in C^1(\mathbb{R})$, entonces por el Teorema del Valor Medio, existe

$$\tau = \theta S_1 + (1 - \theta) S_2 \; , \qquad 0 \leq \theta \leq 1$$

tal que

$$|f(u) - f(v)| = f'(\tau)|u - v|$$

además $a \in L^{\infty}(\Omega)$, entonces

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Gamma)}^2\} \leq \int_{\Omega} f'(\tau)|u-v||w_t|dx$$

$$+ \|a\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} |w_t|^2 dx$$

$$\leq \frac{|f'(\tau)|}{2}\left(\int_{\Omega} |w|^2 dx + \int_{\Omega} |w_t|^2 dx\right) + \|a\|_{L^{\infty}(\Omega)}\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq C\left(\|w\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2\right)$$

Integrando de 0 a $t < T$ y las condiciones iniciales del sistema (2.8):

$$\frac{1}{2}\left(\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Gamma)}^2\right) \leq C\int_0^T \left(\|w\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2\right)dt$$

Luego, mayorando por la izquierda, desigualdad de Poincaré y el Lema de Gronwall (Caso simple), obtenemos

$$\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Gamma)}^2 = 0 \Leftrightarrow w = 0 \;\; c.s. \;\; en \;\; \Omega$$

Esto es, $u = v,\ c.s.\ en\ \ \Omega$.

2.2. Prolongamiento de la solución regular

Aquí obtendremos la solución global del problema (0.1), aplicando el Teorema 5.

Multiplicando la ecuación (0.1) por u_t e integrando sobre Ω, obtenemos

$$(u_{tt}, u_t) + (-\Delta u, u_t) + (f(u), u_t) + (a(x)u_t, u_t) = 0$$

De donde desarrollando los términos $(-\Delta u, u_t)$, $(f(u), u_t)$ y la definición de la energía $E(t)$ obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(E(t)) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} a(x)|u_t|^2 dxdt < 0$$

Sea $t_2 = T$ y $t_1 = 0$

$$E(T) - E(0) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} a(x)|u_t|^2 dxdt < 0$$

Entonces

$$E(T) \leq E(0)$$

Esto es $E(t)$ tiene un decrecimiento cuando $t \to +\infty$

Podemos decir entonces que

$$\forall t \geq 0, \;\; E(0) \geq E(t)\,.$$

Afirmación 3: $T_{max} = +\infty$

Prueba. Ver Peña M., Carlos [14].

Luego de la afirmación en (2.7), se tiene que existe una única solución regular débil del sistema (0.1) en el espacio

$$u \in C\big([0,+\infty]; H_*^1(\Omega)\big) \cap C^1\big([0,+\infty]; H_*^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \cap C^2\big([0,+\infty]; L^2(\Omega)\big)$$

3. Literatura Citada

[1] **Adams, R. A. and Fournier, J, F.**; Sobolev spaces, Academic Press. 2nd. Ed. Canada, 2009.

[2] **Brezis, Haïm**; Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York, 2011.

[3] **Cabanillas L. E.; Bernui B., J. Huaringa S., Z.**; Energy decay of a linear hyperbolic equation with localy distributed damping. Rev. PESQUIMAT, Vol. V, Nº 2, FCM – UNMSM, Lima –Perú. 2002

[4] **Cavalcanti, M., Domingos Cavalcanti, V.**; Iniciacão a Teoria das Distribuicões e aos Espacos de Sobolev, Vol. I e II. Maringá, Texto de Dpto. Matemática UEM, 2000

[5] **Kesavan, S**.; Topics in Functional Analysis and Applications. John Willey Sons. New Delhi, India, 1989.

[6] **Muñoz., J.E. and Pérez, S.A.**; Asymptotic behaviour of the energy in partially viscoelastic materials, Quarterly of Applied Mathematics. Vol. LIX, Nº 3, Setember 2001.

[7] **Muñoz, R., J. E.**; Estabilizacão de Semigrupos e Aplicacões. Edit. Academia das Contos, Rio de Janeiro, 2008.

[8] **Muñoz, R., J. E.**; Teoria dos Distribucões e Equacões Diferenciais Parciais. Textos Avanzados. LNCC. Petrópolis Rio de Janeiro, 2004.

[9] **Pazy, A**.; Semigroups of linear operators and Applications to partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciencies 44. Springer, 1983.

[10] **Pérez, S. A., Yauri, L., V; Gálvez P., R. I**; Decaimiento exponencial de la ecuación de onda con potencial y amortiguamiento localmente distribuido. Rev. PESQUIMAT, FCM – UNMSM, Vol. VII Nº 1, 2004.

[11] **Pérez Salvatierra, A.**; Decaimiento de solucões de equacões parcialmente viscoelasticos. Tesis Doctorado, UFRJ Brasil, 1997.

[12] **Pérez S. A.; Cabanillas, L.E.; Izaguirre, M., R.M., Yauri, L.; Guardia, C. A**.; Comportamiento asintótico de un modelo de placas semilineal con disipación localmente distribuido, Rev. PESQUIMAT, Vol. 12, Nº 2, UNMSM, Lima - Perú. 2009

[13] **Peña, M., C. Pérez, S.A., Guardia, C. A.**; Decaimiento exponencial de la ecuación de la onda semilineal con disipación localizada, Rev. PESQUIMAT. Vol. XVI, Nº 1, 2013. FCM – UNMSM, Lima – Perú.

[14] **Peña M., C.**; Comportamiento asintótico para la ecuación de onda semilineal con amortiguamiento local en dominios no acotados. Tesis de Maestría. UNMSM- FCM. Peru, 2012.

[15] **Portillo, H. and Muñoz, J. E**.; Sobre un problema de contacto unidimensional de ondas elásticas localmente amortecidas, SBA 46 Seminario Brasileiro de Analise, 1997.

[16] **Santiago A., Y. y Muñoz R., J. E**.; Global existence and exponential decay to the wave equation with localized frictional damping Revista PESQUIMAT. Vol. V, Nº 2, 2002, FCM – UNMSM, Lima – Perú.

[17] **Zuazua, E**.; Exponential decay for semilinear wave equation with locally distributed damping, Comm PDE 15, pp: 205- 235, 1990.

REVISTA DE INVESTIGACIÓN MULTIDISCIPLINARIA

CTS CAFE Para ciudadanos…

http://www.ctscafe.pe

Volumen I- N° 1 Marzo 2017

ISSN : 2521-8093